

Analysis:

Differential - und
Integralrechnung
samt Anwendungen

Historie: Anwendungen aus
Physik, Astronomie, und Mechanik
führten

Newton (1665)

Leibniz (1672)

Euler (1755)

auf Begriffe wie Differential " $\frac{dr}{dt}$ "
und Integral " $\int_a^b f(x)dx$ ".

(→ Hildebrandt, Analysis 1+2)

- vage Formulierungen
- Rechnen mit unendlich kleinen Größen
- keine formalen Grenzwertkonzepte

Aber intuitiv richtig mit fundamentalen Konsequenzen !

Newtons Bewegungslehre :

Man kann die Welt math. erklären ~~und~~
" und ist nicht auf Religion angewiesen."

Kritik von Bischof Berkeley (1734) :

"Die math. Schlussweise in
Newtons Lehre gleicht einem
religiösen Mysterium."

ist also eine Glaubensfrage $\leadsto$

Notwendigkeit einer soliden math.

Absicherung auf der Basis von Axiomen

wie z.B. der Lückenlosigkeit von $\mathbb{R}$

(= Menge aller reellen Zahlen) !

Bolzano (1781-1848)

Cauchy (1789-1857) $\leadsto$ Stetigkeit

Jordan (1838-1922)

Cantor (1845-1918)

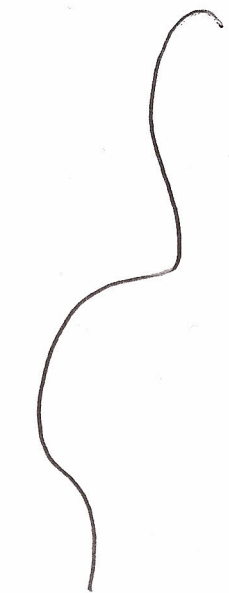
⋮

formulierten die Analysis in der heutigen
Form

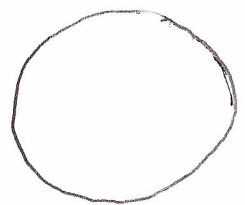
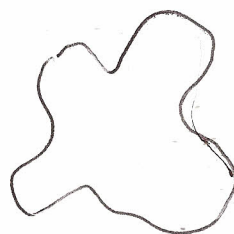
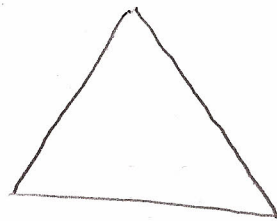
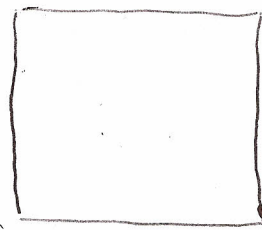
Beispiel (mit geometrischem Bezug):

gegeben: ein Seil mit Länge L

Aufgabe: lege das Seil so zu einer geschlossenen Kurve zusammen, dass der Flächeninhalt maximal wird



Seil



Lösung? Experimente motivieren Kreis
Beweis ???

Begriffe aus der Analysis:

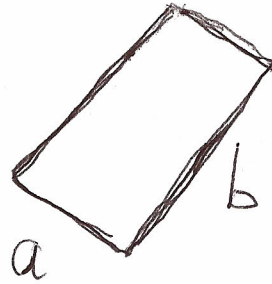
- Kurvenlänge
- Flächeninhalt
- "maximieren"

diese müssen erst erklärt ("definiert")
werden ◊

Wie macht man das für den

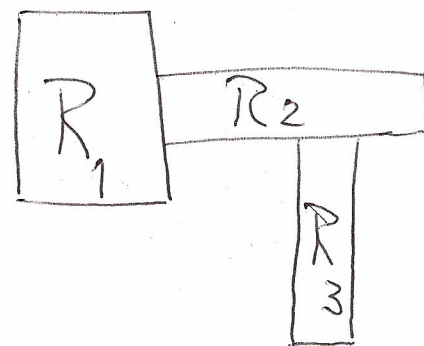
Flächeninhalt einer Figur in der Ebene?

1^{te} Forderung:



Flächeninhalt beim Rechteck $= a \cdot b$
unabhängig von der Lage im Koordinaten-
system

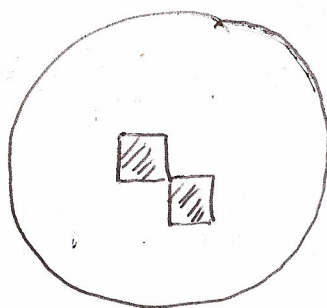
2^{te} Forderung:



Fläche $=$ ~~Summe der Einzelflächen~~
Summe der Einzelflächen

Kreisfläche ? überziehe die Ebene mit

Netz aus kleine Quadraten mit Breite ϵ ,
betrachte die Quadrate, die ganz im
Kreis liegen



Flächeninhalt dieser
Quadrate nach Forderung 1, 2
berechenbar $\leadsto$ $A(\epsilon)$ als Wert

Satz : $A(\epsilon)$ hat einen Grenzwert α
bei $\epsilon \rightarrow 0$.

dann trifft man folgende

Definition : Flächeninhalt des Kreises $= \alpha$.

Hier haben wir jetzt viele Stationen
Übersprungen, u. a.

Konstruktion von $\mathbb{R}$, Lückenlosig-
keit, Grenzwertrechnung,

aber auch in der Vorlesung können wir
nicht alle Grundlagen erklären, das
führt in die

Mathematische Logik und Mengenlehre

deren Arbeitsweise man erst verstehen
kann, wenn man ein ganzes Stück
Mathematik studiert hat!

unser Standpunkt :

Vorgabe von Axiomen +
Schlussregeln der naiven Logik

Axiome: unbewiesene Grundsätze

("es gibt gewisse math. Objekte")

Logik: ~~Schluss~~ regelt den Umgang mit den Objekten,

z.B. 1.) $A \Rightarrow B$

(Aussage A impliziert Aussage B)

2.) Ist Aussage A wahr, so soll die Aussage $\neg A$ (nicht A) falsch sein.

Sprache: Objekte der Mathematik
und ihre Zusammenhänge werden
beschrieben durch

Buchstabenzeichen: $a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots$

Zahlzeichen: $1, 134, \dots$

Sonderzeichen: $=, >, \int_a^b, \dots$

$\Rightarrow, \Leftrightarrow, \dots, \exists, \forall, \dots$

Zuviel Formalismus schadet:

$$x \in \mathbb{P} \Leftrightarrow x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 2 \wedge$$

$$\left(\forall z \in \mathbb{N} : \frac{x}{z} \in \mathbb{N} \Rightarrow \right. \\ \left. z = 1 \vee z = x \right)$$

Das ist die Definition der Primzahlmenge $\mathbb{P}$
unter Benutzung von

$: \iff$ definitionsgemäß äquivalent,
 $\wedge$ logisches und,
 $\vee$ logisches oder,
 $\forall$ für alle, $\in$ Element von,

Arbeitsweise :

Axiome ergeben mit den Schlussregeln
 math. Aussagen oder Sätze, die
 einen Beweis bedürfen

Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Dieser Satz ist zu unterscheiden, von der Definition der Primzahlmenge $\mathbb{P}$:
eine Definition ist eine Abkürzung,
rechts von $:$ $\iff$ oder $:=$
dürfen nur bekannte Objekte stehen!

Schlussbemerkung:

1. in der Mathematik ist
nicht alles beweisbar (Axiome!)
2. die Exaktheit der Mathematik
besteht darin, die unbewiesenen Grund-
sätze genau zu benennen und sich
streng an die Schlussregeln zu halten

3. Die Anzahl der Axiome

wurde im Laufe der Entwicklung
immer weiter optimiert,
trotzdem ist die Widerspruchsfreiheit nicht garantiert
und kann auch nicht mit
math. Methoden geprüft werden
(Münchhausen!)

§ 1 Mengen und Abbildungen

Def 1.1 (von Georg Cantor, 1845-1918)

// Eine Menge M ist eine Zusammen-
fassung von wohlbestimmten und
wohlunterschieden Objekten der
mathematischen Anschauung zu
einem Ganzen. //

(keine math. exakte Definition, reicht
aber für unser Zwecke)

Cantor ist der Begründer
der Mengenlehre, wir folgen seinen

Schreibweisen und Vereinbarungen:

- 1) $x \in M$ (x ist Element von M)
- 2) $x \notin M$ (... nicht ...)
- 3) explizite Beschreibung von Mengen
durch Auflistung der Elemente, etwa:

$$M = \{1, \sqrt{2}\}$$

- 4) Beschreibung durch eine Eigenschaft:
 $\mathbb{P} = \{x : x \text{ ist Primzahl}\}$

5) Die Reihenfolge der Elemente
ist egal:

$$\{1, \sqrt{2}\} = \{\sqrt{2}, 1\}$$

6) fixierte Symbole für häufig
benutzte Mengen:

$\mathbb{N}$ natürliche Zahlen,

$\mathbb{Z}$ ganze Zahlen,

$\mathbb{Q}$ rational - II - (Brüche),

$\mathbb{R}$ reelle - II - ,

$\mathbb{C}$ komplexe - II - .

7) Gleichheit von Mengen

$M = N : \iff$ die Elemente von M
und N sind gleich

8) $M \subset N$ (M ist Teilmenge von N)

: $\iff$ jedes Element von M ist in N

Gibt es überhaupt Mengen?

Axiom (von der leeren Menge):

- Es gibt ein math. Objekt (genannt leere Menge $\emptyset$), das keine Elemente enthält.

- Für jede Menge M gilt $\emptyset \subset M$

Sinnhaftigkeit ???

Standpunkt: wir haben einen Baustein!

Manchmal dauert es über 300 Jahre, um zu beweisen, dass eine Menge leer ist:

Für eine natürliche Zahl $k \geq 3$ sei

$$M := \left\{ (x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{N} \text{ und } x^k + y^k = z^k \right\}$$

(Fermat's Vermutung:) $M = \emptyset$!

Wie kommt man von $\emptyset$ weiter?

Axiom (über die 2^{er} Menge):

Für alle (math. Objekte) a, b
existiert eine Menge A mit

$$x \in A \iff x = a \text{ oder } x = b$$

Schreibweise: $A = \{a, b\}$

Spezialfall: $a = b \rightsquigarrow$

$A = \{a\}$ Eiermenge

Forderung: $a \neq \{a\}$ 

Folgerungen:

1.) Es gibt unendlich viele verschiedene Mengen

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots$

(Modell für $1, 2, 3, \dots$)

2.) Es gibt Mengen mit unendlich vielen

Elementen: fasse dazu die obigen Mengen
als Elemente einer neuen Menge auf

Achtung: für 2.) braucht man ein Axiom, das einzelne Mengen als Elemente einer neuen Menge erlaubt

Man muss aber die Mengenbildung einschränken:

$A :=$ Menge aller Mengen
("Allmenge")

Dann: $A \in A$? !

Literatur:

Paul Halmos, Naive Mengenlehre

Alfred Tarski, Einführung in die
math. Logik

(Vandenhoeck & Ruprecht)